10 Área y volumen de un prisma

Saberes previos

Cada uno de los 30 pisos de un edificio en forma de prisma se divide en 50 oficinas. Si cada oficina se considera como una unidad de medida de volumen, ¿cuál es el volumen del edificio?

Analiza

Cada uno de los cubos con los que se arma esta estructura tiene 8 cm^3 de volumen.

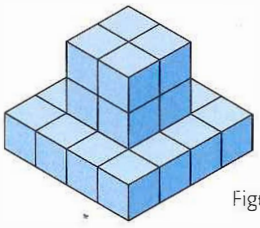


Figura 4.56

- ¿Cuál es el área de la base y el volumen de la estructura?

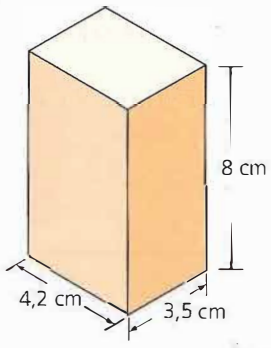


Figura 4.57

Conoce

La base de la estructura tiene forma cuadrada con 4 cubos en cada lado, cada uno de los cuales tiene como arista 2 cm. Así, el lado del cuadrado de la base mide $4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm y su área es 8 cm $\cdot 8$ cm $= 64$ cm^2.

Ahora bien, en la capa de la base hay $4 \cdot 4 = 16$ cubos y en cada una de la segunda y tercera capas hay 4 cubos. Así, como en la estructura se cuentan en total 24 cubos, su volumen es: $24 \cdot 2$ $cm^3 = 48$ cm^3.

10.1 Área lateral y área total de un prisma

Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales llamadas **bases** y sus **caras laterales** son **paralelogramos**.

El **área lateral** A_L del prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales y en general, es igual al producto del perímetro de la base por la altura.

El **área total** A_T del prisma se halla sumándole al área lateral el área de las dos bases.

Ejemplo 1

En el prisma rectangular de la Figura 4.57 el perímetro de la base es igual a: $2 \cdot 4{,}2$ cm $+ 2 \cdot 3{,}5$ cm $= 8{,}4$ cm $+ 7$ cm $= 15{,}4$ cm y su altura es 8 cm.

Así, su área lateral es: $A_L = 15{,}4$ cm $\cdot 8$ cm $= 123{,}2$ cm^2.

De otra parte, el área de una de las bases del prisma es:

$$AB = 4{,}2 \text{ cm} \cdot 3{,}5 \text{ cm} = 14{,}7 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total del prisma es:

$$A_T = A_L + 2AB = 123{,}2 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 14{,}7 \text{ cm}^2 = 123{,}2 \text{ cm}^2 + 29{,}4 \text{ cm}^2 = 152{,}6 \text{ cm}^2.$$

10.2 Volumen de un prisma

El **volumen** (V) de un prisma es igual al producto del área de su base (A_B) por su altura (h).

Ejemplo 2

El volumen del prisma del ejemplo anterior es:

$$V = A_B \cdot h = 14{,}7 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 117{,}6 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 3

Si un cubo tiene como arista 2 cm su volumen es 8 cm^3. Al triplicar su arista se obtiene un cubo de volumen $(6 \text{ cm})^3 = 216$ cm^3, es decir, su volumen queda multiplicado por 27, pues 27×8 $cm^3 = 216$ cm^3.

En general, si un sólido multiplica sus dimensiones por un factor k, su volumen se multiplica por k^3.

MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

Ejemplo 4

Para hallar el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 6 cm y $3\sqrt{3}$ cm de apotema, y cuya altura es 12 cm, se debe hallar primero el área de una de sus bases.

Es importante recordar que el área de un polígono regular es igual a su semiperímetro por la apotema (a).

El área de la base del prisma es entonces:

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 6\text{ cm}) \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\text{ cm})}{2}$$
$$= 54 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}^2 = 54 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Por tanto, el volumen del prisma hexagonal es:

$$V = A_B \cdot h = 54 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} = 648 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}^3$$

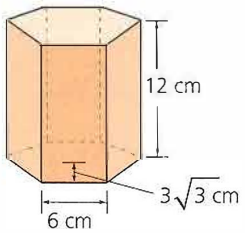


Figura 4.58

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. Calcula el volumen de la estructura de la Figura 4.59 si la arista de cada cubo que lo conforma mide 3 cm.

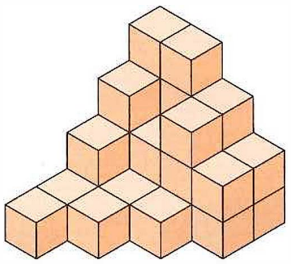


Figura 4.59

Modelación

2. Calcula el volumen de cada uno de los siguientes prismas rectangulares y de las partes que están ocupadas por cubos. (Cada cubo tiene una arista de medida de 1 cm).

a.

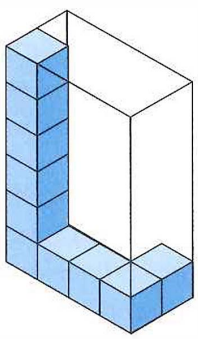


Figura 4.60

b.

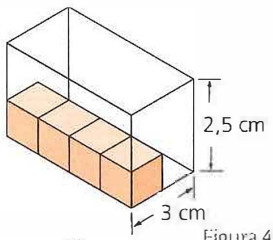


Figura 4.61

c.

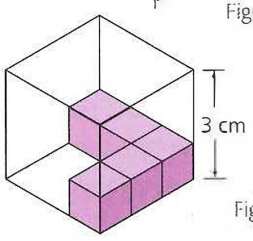


Figura 4.62

Evaluación del aprendizaje

Resuelve.

a. Calcula el volumen del prisma rectangular de la Figura 4.63.

b. Duplica la longitud de uno de los lados del prisma y calcula de nuevo su volumen.

c. Toma el prisma original y duplica otra de sus longitudes. Calcula el volumen del prisma.

d. Compara los resultados de los literales anteriores. ¿Qué relación hay entre los volúmenes calculados?

e. ¿Qué pasa si se duplica la longitud de todos los lados del prisma?

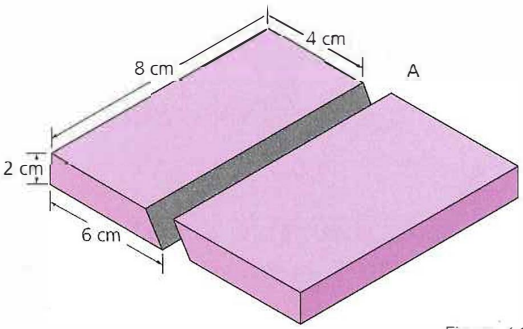


Figura 4.63

MATEMÁTICAS © EDICIONES SM